

Master professionnel II : Ingénierie mathématique : Option Statistique

Statistique Bayésienne.

Anne PHILIPPE

Université de Nantes

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray

Fiche 4. Inférence Bayésienne. [suite]

EXERCICE 1.

Soit  $\theta > 0$  un paramètre. Soit  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi uniforme sur  $[\theta, 2\theta]$ . On note  $m_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$  et  $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ .

1) Écrire la vraisemblance du modèle.

*Indication : commencer par montrer que presque sûrement,  $M_n \leq 2m_n$*

2) Montrer que  $\pi(\theta) \propto \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\theta)$  est une loi a priori impropre.

3) Calculer la loi a posteriori associée.

4) Représenter graphiquement l'allure de la densité de la loi a posteriori .

5) En déduire que les régions de confiance HPD pour le paramètre  $\theta$  sont de la forme  $[\frac{M_n}{2}, b_\alpha]$ .

6) Donner l'expression  $b_\alpha$  en fonction de  $1 - \alpha$  le niveau de la région de confiance.

7) a) Si  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  sont iid suivant la loi uniforme sur  $[\theta, 2\theta]$ , quelle est la fonction de répartition de  $M_n$  ?

b) Calculer le niveau fréquentiste de la région HPD de niveau  $1 - \alpha$

EXERCICE 2. CALCUL NUMÉRIQUE DES INTERVALLES DE CRÉDIBILITÉ

On dispose de  $n = 50$  observations  $X_1, \dots, X_n$  iid suivant une loi exponentielle de paramètre  $\theta > 0$ . Pour tester et comparer les méthodes numériques, on utilisera les  $n$  premières données du fichier de durées de fonctionnement d'ampoules (cf. Fiche 2). On suppose que la loi a priori sur  $\theta$  est la loi Gamma de paramètre  $(1, 1)$ .

1) Calculer et représenter graphiquement tous les intervalles de crédibilité de niveau 95% en utilisant la fonction `qgamma` (qui retourne les quantiles d'une loi Gamma)

2) Rechercher le plus court intervalle de crédibilité à 95%.

3) Écrire une fonction qui calcule et représente graphiquement tous les intervalles de crédibilité de niveau 95% à partir d'un échantillon de nombres pseudo aléatoires suivant la loi a posteriori.

4) Écrire une fonction qui calcule le plus court intervalle de crédibilité de niveau 95% à partir d'un échantillon de nombres pseudo aléatoires suivant la loi a posteriori.

5) Simuler un échantillon de taille  $N$  (à choisir) suivant la loi a posteriori, puis donner une approximation du plus court intervalle de crédibilité.

6) Comparer avec les résultats des questions 1-2