Master professionnel II : Ingénierie mathématique : Option Statistique

Statistique Bayésienne.

Anne Philippe
Université de Nantes
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray

Adresses email :
`Anne.Philippe@univ-nantes.fr`

Pages web :
Information sur le cours / données / exercices
`http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~philippe/Enseignement.html`
`http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~philippe/R_freeware.html`

Fiche 1. Prérequis

Exercice 1. Calcul de lois : la loi β

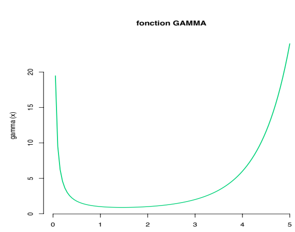
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.
Soit X et Y deux variables aléatoires *indépendantes*. On suppose que
— X est distribuée suivant la loi $\Gamma(a, 1)$
— Y est distribuée suivant la loi $\Gamma(b, 1)$
On rappelle que la loi $\Gamma(a, 1)$ admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} e^{-x} x^{a-1} \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

La fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} \, \mathrm{d}t = (a-1)\Gamma(a-1).$$

On a en particulier pour tout $a \in \mathbb{N}$, $\Gamma(a+1) = a!$



1) Écrire la densité de la loi du couple (X, Y)
2) Donner la loi du couple $(V, W) = (X + Y, \dfrac{X}{X+Y})$.
3) Les variables aléatoires V et W sont elle indépendantes ? Préciser les lois marginales de V et W.
4) En déduire une expression de $B(a, b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$.

Exercice 2. Convergence

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*$. On dispose deux échantillons indépendants $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ qui possèdent les propriétés suivantes

- $(X_1, \ldots, X_n)$ sont iid suivant la loi exponentielle de paramètre α
- $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont iid suivant la loi exponentielle de paramètre $\alpha\beta$.

La loi exponentielle de paramètre $\tau > 0$ a pour densité $f(x) = \tau e^{-\tau x}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$ On souhaite estimer les paramètres α et β à partir des observations $(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$.

1) Écrire la fonction de vraisemblance de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n)$.
2) Calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres (α, β). On les note $(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$.
3) On pose
$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{et} \qquad \bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$
Montrer que le vecteur $Z_n := \begin{pmatrix} \bar{X}_n \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix}$ converge presque sûrement vers $z = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} \\ \alpha^{-1}\beta^{-1} \end{pmatrix}$.
4) En déduire que $(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n)$ est un estimateur convergent au sens de la convergence presque sure.
5) Montrer que $\sqrt{n}(Z_n - z)$ converge en loi vers une variable gaussienne. Préciser la moyenne et la variance de la limite.
6) En déduire que
$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_n \\ \hat{\beta}_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right)$$
converge en loi vers une variable gaussienne. Préciser la moyenne et la variance de la limite.

Exercice 3. Conditionnement pour des lois discrètes

Soit (X_1, X_2) un couple de variables aléatoires indépendantes et de même loi définie par
$$\mathbf{P}(X_1 = k) = \alpha^k(1-\alpha) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$
où α est fixé dans $]0, 1[$. (On note $\tilde{G}(\alpha)$ cette loi)

On pose
$$N = \begin{cases} 1 & \text{si } X_1 \leq X_2 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$
Déterminer la loi de X_1 sachant N.

Exercice 4. Conditionnement dans le cas de lois continues

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires positives. La loi du vecteur (X, Y) est donnée par
— Y a une loi de densité
$$f(t) = \lambda^2 t\, e^{-\lambda t}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(t)$$
— La loi de X conditionnellement à Y est la loi uniforme sur $[0, Y]$.

1) Quelle est la loi du vecteur (X, Y) ?
2) Quelle est la loi de X ?
3) Quelle est la densité de la loi de Y conditionnellement à X
4) Calculer $\mathbb{E}(Y|X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ (par deux méthodes) .

Exercice 5. Construction de la loi multi-nomiale

Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes. La loi de X_i est la loi de poisson de paramètre $\theta_i > 0$. On pose $S_n = X_1 + ... + X_n$.

1) Quelle est la loi conditionnelle de X_1 sachant S_n
2) Quelle est la loi de $(X_1, ..., X_n)$ sachant S_n.

Exercice 6.

Soit $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et de même loi appartenant à L^1.

1) Calculer $\mathbb{E}(\sum_{j=1}^n X_j | X_1)$.
2) Montrer que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_k | \sum_{j=1}^n X_j)$ ne dépend pas de k.
3) Calculer $\mathbb{E}(X_1 | \sum_{j=1}^n X_j)$.